Vibrations et Ondes

Partie 1 (Vibrations)

Chapitre III

Systèmes Linéaires Amortis à un Seul Degré de Liberté

Lagrangien et Fonction de Dissipation

$$\mathcal{L} = T - U. \qquad \mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2.$$

Équation de Lagrange

Translation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}}.$$

Rotation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}.$$

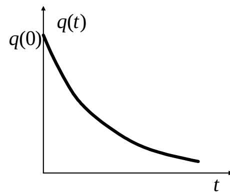
Équation du Mouvement

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Équation Horaire

- $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0 : q(t) = e^{-\lambda t}(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t})$
- $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0 : q(t) = e^{-\lambda t}(A_1 + A_2 t)$
- $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 : q(t) = A e^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \phi)$

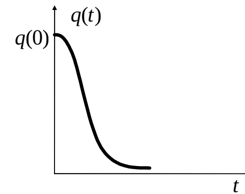
Graphes



$\lambda^2 - \omega_0^2 > 0.$

$e^{-\lambda t}(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}t})$

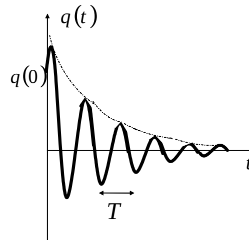
Régime apériodique



$\lambda^2 - \omega_0^2 = 0.$

$e^{-\lambda t}(A_1 + A_2 t)$

Régime critique



$\lambda^2 - \omega_0^2 < 0.$

$A e^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \phi)$

Régime pseudo-périodique

Décrément Logarithmique

$$\delta = \ln \frac{A e^{-\lambda t}}{A e^{-\lambda(t+T)}} = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \frac{1}{n}\ln\frac{q(t)}{q(t+nT)} = \lambda T.$$

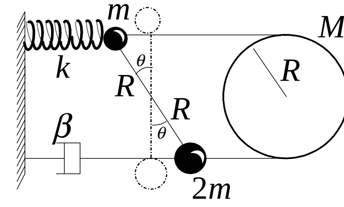
Facteur de Qualité

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}.$$

1) Fonction de Dissipation, Équation de Lagrange avec Amortissement

1.1 Soit le système amorti ci-contre. A l'équilibre la tige était verticale *(en pointillé)* **et le ressort au repos. Le fil autour du disque est inextensible et non glissant.**

1. **Trouver l'énergie cinétique T du système.**
2. **Trouver l'énergie potentielle U en fonction de $\theta \ll 1$.**
3. **Trouver le Lagrangien et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.**
4. **Déduire l'équation du mouvement.**



Solution :

1. $T = T_m + T_{2m} + T_M = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}.2m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{4}MR^2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}(6m+M)R^2\,\dot{\theta}^2$.

2. $U = U_m + U_{2m} + U_k \approx -mg(R - R\cos\theta) + 2mg(R - R\cos\theta) + \frac{1}{2}k(R\sin\theta)^2 \approx \frac{1}{2}(mgR + kR^2)\theta^2$.

3. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{4}(6m+M)R^2\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(mgR + kR^2)\theta^2$.

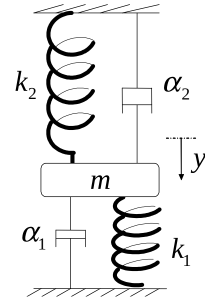
La fonction de dissipation est : $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\beta v_{2m}^2 = \frac{1}{2}\beta(R\dot{\theta})^2$.

4. L'équation du mouvement est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Longrightarrow \frac{1}{2}(6m+M)R^2\ddot{\theta} + (mgR + kR^2)\theta = -\beta R^2\dot{\theta}$

$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\beta}{6m+M}\dot{\theta} + \frac{2(mg+kR)}{R(6m+M)}\theta = 0.}$$

1.2 Soit le système amorti ci-contre. A l'équilibre le ressort k_1 était comprimé et k_2 allongé chacun d'une distance y_0.

1. **Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U du système.**
2. **Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.**
3. **Trouver le Lagrangien et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.**
4. **Déduire l'équation du mouvement.**



Solution :

1. $T = \frac{1}{2}mv^2 = \boxed{\frac{1}{2}m\,\dot{y}^2.}$

$U = -mg(y_0 + y) + \frac{1}{2}k_1(y_0+y)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_0+y)^2$
$\quad = (-mg + k_1y_0 + k_2y_0)y + \frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2 + C^{te}$.

2. La condition d'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow -mg + k_1y_0 + k_2y_0 = 0$, nous permet de simplifier U :

$\boxed{U = \frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2 + \mathrm{C}^{te}.}$

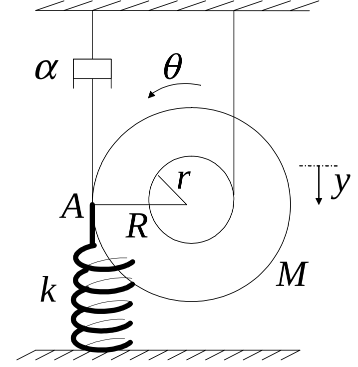
3. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\,\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2 + \mathrm{C}^{te}$.

La fonction de dissipation est : $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha_1 v_m^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 v_m^2 = \frac{1}{2}\alpha_1\,\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\,\dot{y}^2 = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\,\dot{y}^2$.

4. L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \dot{y}} \Longrightarrow m\ddot{y} + (k_1+k_2)y = -(\alpha_1+\alpha_2)\dot{y}$

$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{y} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}\dot{y} + \frac{k_1+k_2}{m}y = 0.}$$

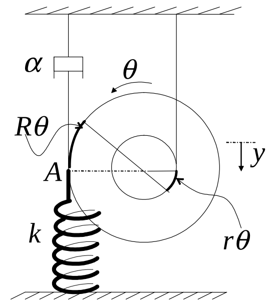
1.3 En tournant le disque ci-contre peut monter et descendre grâce au fil non glissant et inextensible enroulé autour du sillon circulaire de rayon r. A l'équilibre le ressort k était comprimé d'une distance y_0. L'amortisseur α représente les frottements



1. **Trouver l'énergie cinétique T du système.**
2. **Trouver l'énergie potentielle U en fonction de y.**
3. **Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.**
4. **Trouver le Lagrangien et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.**
5. **Déduire l'équation du mouvement.**

($\theta \ll 1$. *Le moment d'inertie du disque est* $I = \frac{1}{2}MR^2$.)

Solution



1. $T = T_{M(translation)+(rotation)} = \frac{1}{2}M\,\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\,\dot{y}^2 + \frac{1}{4}M(R\dot{\theta})^2$.
Puisque le fil est inextensible et non glissant, lorsque le disque descend d'une distance y il tourne d'un angle θ tel que: $y = r\theta$. D'où : $\theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow R\dot{\theta} = \frac{R}{r}\dot{y}$.
Donc, $\boxed{T = \frac{1}{2}M(1+\frac{R^2}{2r^2})\,\dot{y}^2.}$

2. En descendant d'une distance y le disque tourne aussi d'un angle θ, donc le déplacement du point A lors du mouvement est $y + R\theta = (1+\frac{R}{r})y$.
Comme le ressort est relié au point A et était déjà comprimé au départ, sa compression totale est $y_0+(1+\frac{R}{r})y$. D'où

$$U = U_{disque} + U_{ressort} = -Mgy + \frac{1}{2}k(y_0 + y + R\theta)^2 = -Mgy + \frac{1}{2}k[y_0+(1+\frac{R}{r})y]^2$$
$$= [-Mg + ky_0(1+\frac{R}{r})]y + \frac{1}{2}k(1+\frac{R}{r})^2 y^2 + C^{te}.$$

3. La condition d'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, nous permet de simplifier U: $\boxed{U = \frac{1}{2}k(1+\frac{R}{r})^2 y^2 + C^{te}.}$

4. $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}M(1+\frac{R^2}{2r^2})\,\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k(1+\frac{R}{r})^2 y^2 + C^{te}$.
La fonction de dissipation est: $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_A^2 = \frac{1}{2}\alpha(\dot{y} + R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha(\dot{y} + \frac{R}{r}\dot{y})^2 = \frac{1}{2}\alpha(1+\frac{R}{r})^2\,\dot{y}^2$.

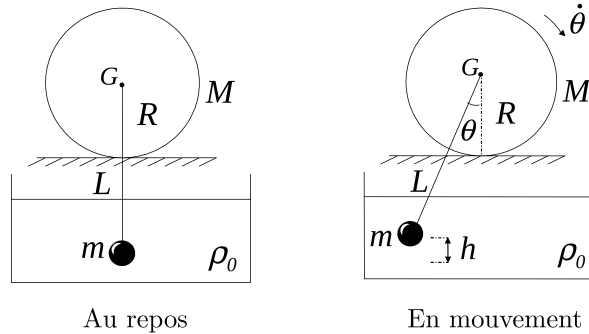
5. L'équation du mouvement est donc: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} \Longrightarrow M(1+\frac{R^2}{2r^2})\ddot{y} + k(1+\frac{R}{r})^2 y = -\alpha(1+\frac{R}{r})^2\dot{y}$

$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{y} + \frac{2\alpha(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}\dot{y} + \frac{2k(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}y = 0.}$$

1.4 Le système ci-dessous est constitué d'un cylindre de masse M roulant sans glissement sur une table horizontale. Une tige sans masse de longueur L est collée au cylindre et porte à son bout une boule de masse m, de densité ρ et de rayon très faible devant L. Dans son mouvement de va-et-vient sur la table, le disque fait balancer la boule à l'intérieur d'un liquide de densité ρ_0.

1. Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U du système en fonction de $\theta \ll 1$, puis construire le Lagrangien. (*Dû à la poussée d'Archimède, le poids apparent de la boule est $P = mg - f_A$.*)

2. En supposant que la boule est soumise à une force de frottement visqueuse de la part du liquide: $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$, trouver la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ et l'équation du mouvement.



Solution :

1. $T = T_{Cylindre(translation)} + T_{Cylindre(rotation)} + T_{Boule} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_{Boule}^2$.

Lorsque le disque avance d'une distance $x = R\theta$ sur la table il balance la boule en arrière d'une distance $L\sin\theta$ donc: $\begin{cases} x_{Boule} = x - L\sin\theta \approx R\theta - L\theta \\ y_{Boule} = L\cos\theta \approx L \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_x \approx (R-L)\dot{\theta} \\ v_y \approx 0 \end{cases} \Longrightarrow v_{Boule}^2 = v_x^2 + v_y^2 = (R-L)^2\dot{\theta}^2$.

D'où $T = \frac{1}{2}M(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-L)^2\dot{\theta}^2 = \boxed{\frac{1}{2}[\frac{3}{2}MR^2 + m(R-L)^2]\dot{\theta}^2.}$

À cause de la poussé d'Archimède le poids P de la boule à l'intérieur du liquide n'est pas mg mais $P = mg - f_A = mg - \rho_0 V_{boule} g$. Puisque $V_{Boule} = \frac{m}{\rho} \Longrightarrow P = mg - \rho_0 \frac{m}{\rho} g = m(1 - \frac{\rho_0}{\rho})g$.

Donc l'énergie potentielle n'est pas mgh mais, $U = m(1 - \frac{\rho_0}{\rho})gh = mg(1 - \frac{\rho_0}{\rho})(L - L\cos\theta) \approx \boxed{\frac{1}{2}mgL(1 - \frac{\rho_0}{\rho})\theta^2.}$

Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\frac{3}{2}MR^2 + m(R-L)^2]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgL(1 - \frac{\rho_0}{\rho})\theta^2$.

2. La fonction de dissipation est: $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_{Boule}^2 = \frac{1}{2}\alpha(R-L)^2\dot{\theta}^2$.

Équation du mouvement: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Longrightarrow [\frac{3}{2}MR^2 + m(R-L)^2]\ddot{\theta} + mgL(1 - \frac{\rho_0}{\rho})\theta = -\alpha(R-L)^2\dot{\theta}$

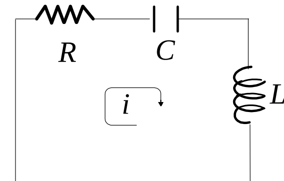
$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\alpha(R-L)^2}{3MR^2 + 2m(R-L)^2}\dot{\theta} + \frac{2mgL(1-\rho_0/\rho)}{3MR^2 + 2m(R-L)^2}\theta = 0.}$$

1.5 Soit le circuit électrique ci-contre.

1. Trouver à l'aide de la loi des mailles l'équation du mouvement de la charge q dans le circuit.

2. Déduire l'équation différentielle du courant i.

3. Déduire l'équation différentielle de la tension u_L aux bornes de L.



Solution :

1. La loi des mailles nous donne $u_R + u_C + u_L = 0 \Longrightarrow Ri + \frac{\int i dt}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$.

Puisque $i = \dot{q}$, on a: $R\dot{q} + \frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0.}$ (1)

2. En dérivant une fois l'équation (1) on trouve, $\frac{d^2\dot{q}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\dot{q}}{LC} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.}$ (2)

3. En dérivant une fois l'équation (2) on trouve, $\frac{d^3 i}{dt^3} + \frac{R}{L}\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC}\frac{di}{dt} = 0$.

Puisque $u_L = L\frac{di}{dt}$ on a $\frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L}$. D'où: $\frac{1}{L}\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{R}{L^2}\frac{du_L}{dt} + \frac{1}{L^2 C}u_L = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{u}_L + \frac{R}{L}\dot{u}_L + \frac{1}{LC}u_L = 0.}$

2) Nature des Mouvements Amortis et leur Équation Horaire

2.1 L'équation du mouvement trouvée à l'exercice 1.2 est:

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{m}\dot{y} + \frac{k_1 + k_2}{m}y = 0.}$$

Pour chacun des cas suivants:

a) m =2kg, k_1 =50N/m, k_2 =40N/m, α_1 =0,3N.m^{-1}.s, α_2 =0,2N.m^{-1}.s.
b) m =2kg, k_1 =23N/m, k_2 =27N/m, α_1 =8N.m^{-1}.s, α_2 =12N.m^{-1}.s.
c) m =2kg, k_1 =1,5N/m, k_2 =0,5N/m, α_1 =5,5N.m^{-1}.s, α_2 =2,5N.m^{-1}.s.

1. **Déduire la nature du mouvement.**
2. **Écrire l'équation horaire $y(t)$, sachant qu'au départ la masse est écartée de l'équilibre de** 1cm **puis lancée** *vers le haut* **avec une vitesse égale à** 10cm/s.

Solution
L'équation du mouvement est de la forme $\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$, avec: $\lambda = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$.
La nature du mouvement est donnée par le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$.

a) $\lambda \approx \mathbf{0,12s^{-1}}$ et $\omega_0^2 = \mathbf{45rad^2.s^{-2}}$: $\lambda^2 - \omega_0^2 \approx \mathbf{-44,9s^{-1}} < 0$: mouvement **pseudo-périodique.**
L'équation horaire est $y(t) = Ae^{-\mathbf{0,12}t}\cos(6{,}7t+\phi)$. Trouvons A et ϕ avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) = A\cos\phi = 1 \\ \dot{y}(0) = -\mathbf{0,12}A\cos\phi - \mathbf{6,7}A\sin\phi = -10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = A\cos\phi \\ 9{,}88 = \mathbf{6,7}A\sin\phi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi \approx \mathbf{55,8}^\circ. \\ A \approx \mathbf{1,8cm}. \end{cases}$$

Finalement, $y(t) = \mathbf{1,8}e^{-\mathbf{0,12}t}\cos(\mathbf{6,7}t + \mathbf{55,8}^\circ)$. (cm)

b) $\lambda = \mathbf{5s^{-1}}$ et $\omega_0^2 = \mathbf{25rad^2.s^{-2}}$: $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$: le mouvement est en **régime critique**
L'équation horaire est $y(t) = e^{-\mathbf{5}t}(A_1 + A_2 t)$. Trouvons A_1 et A_2 avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) = A_1 = 1 \\ \dot{y}(0) = -5A_1 + A_2 = -10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = \mathbf{1cm}. \\ A_2 = \mathbf{-5cm/s}. \end{cases}$$

Finalement, $y(t) = (\mathbf{1} - \mathbf{5}t)e^{-\mathbf{5}t}$. (cm)

c) $\lambda = \mathbf{2s^{-1}}$ et $\omega_0^2 = \mathbf{1rad^2.s^{-2}}$: $\lambda^2 - \omega_0^2 = \mathbf{3s^{-1}} > 0$: mouvement **apériodique**
L'équation horaire est $y(t) = A_1 e^{(-2-\sqrt{\mathbf{3}})t} + A_2 e^{(-2+\sqrt{\mathbf{3}})t}$.
Trouvons A_1 et A_2 avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) = A_1 + A_2 = 1 \\ \dot{y}(0) = \left(-2-\sqrt{3}\right)A_1 + \left(-2+\sqrt{3}\right)A_2 = -10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 \approx \mathbf{2,8cm}. \\ A_2 \approx \mathbf{-1,8cm}. \end{cases}$$

Finalement, $y(t) = e^{-2t}(\mathbf{2,8}e^{-\sqrt{\mathbf{3}}t} - \mathbf{1,8}e^{\sqrt{\mathbf{3}}t})$. (cm)

3) Condition d'Oscillation Amortie et Décréments Logarithmiques

3.1 L'équation du mouvement trouvée à l'exercice 1.1 est:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\beta}{6m + M}\dot{\theta} + \frac{2(mg + kR)}{R(6m + M)}\theta = 0.}$$

1. **Sachant que** m =2kg, M =5kg, k =0,4N/m, R =50cm, g =10m.s^{-1}, **trouver la valeur maximale que le coefficient β ne doit pas atteindre pour que le système oscille.**
2. **Avec un amortisseur de coefficient** β =20N.m^{-1}.s, **le système oscille mais son amplitude diminue au cours du temps. Trouver le temps τ nécessaire pour que l'amplitude diminue à** 1/5 **de sa valeur.**
3. **Calculer le décrément logarithmique δ.**
4. **L'amortisseur précédent est maintenant remplacé par un autre de coefficient β'. On remarque alors que l'amplitude diminue à** 1/3 **de sa valeur après** 24 **oscillations complètes. Déduire la valeur du coefficient β'.**

Solution L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, avec: $\lambda = \frac{\beta}{6m+M}$ et $\omega_0^2 = \frac{2(mg+kR)}{R(6m+M)}$.

1. Pour qu'un système amorti oscille, il faut qu'il soit en régime pseudo-périodique, donc il faut que: $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\beta}{6m+M} < \sqrt{\frac{2(mg+kR)}{R(6m+M)}} \Longrightarrow \beta < \sqrt{\frac{2(mg+kR)(6m+M)}{R}}$.
A.N: $\beta <$ **37N.s/m**. C'est la valeur que β ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

2. Puisque le système amorti oscille son mouvement est pseudo-périodique: l'équation horaire est: $\theta(t) = Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \phi)$.
Pour que l'amplitude diminue à 1/5 de sa valeur il faut un temps τ tel que $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}$
$\Longrightarrow \lambda\tau = \ln 5 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 5}{\lambda}$. A.N: $\lambda \approx 1{,}18\text{s}^{-1} \Longrightarrow \tau \approx \mathbf{1,36}s$.

3. Le décrément logarithmique est $\delta = \lambda T = \lambda\frac{2\pi}{\omega} = \lambda\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$. **A.N:** $\delta \approx \mathbf{4,04}$.

4. Puisque l'amplitude diminue à 1/3 de sa valeur après 24 oscillations, on a: $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}'(t+24T')} = \frac{1}{3}Ae^{-\boldsymbol{\lambda}' t}$
$\Longrightarrow \lambda'.24\text{T}' = \ln 3 \Longrightarrow \lambda'\frac{48\pi}{\omega'} = \ln 3 \Longrightarrow \frac{\lambda' 48\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda'^2}} = \ln 3 \Longrightarrow \lambda' = \frac{\omega_0 \ln 3}{\sqrt{(48\pi)^2+(\ln 3)^2}}$.
A.N: $\lambda' \approx 1{,}6.10^{-2}\text{s}^{-1}$. Puisque $\lambda' = \frac{\beta'}{6m+M}$, on trouve $\beta' \approx \mathbf{0,27}$N.s/m.

3.2 L'équation du mouvement trouvée à l'exercice 1.2 est:

$$\ddot{y} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}\dot{y} + \frac{k_1+k_2}{m}y = 0.$$

1. Pour $m = 2$kg, $k_1 = 12$N/m, $k_2 = 8$N/m, $\alpha_1 = 2$N.m^{-1}.s, **trouver la valeur maximale que le coefficient** α_2 **ne doit pas atteindre pour que le système oscille.**
2. Avec un amortisseur de coefficient $\alpha_2 = 1$N.m^{-1}.s, **le système oscille mais son amplitude diminue au cours du temps. Trouver le temps** τ **nécessaire pour que l'amplitude diminue à** 1/7 **de sa valeur.**
3. Calculer le décrément logarithmique δ.
4. L'amortisseur précédent est maintenant remplacé par un autre de coefficient α_2'. **On remarque alors que l'amplitude diminue à 1/8 de sa valeur après 2 oscillations complètes. Déduire la valeur du coefficient** α_2'.

Solution
L'équation est de la forme $\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$, avec: $\lambda = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$.

1. Pour qu'un système amorti oscille, il faut qu'il soit en régime pseudo-périodique, donc il faut que: $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2m} < \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \Longrightarrow \alpha_2 < 2\sqrt{m(k_1+k_2)} - \alpha_1$.
A.N: $\alpha_2 <$ **10,6N.s/m**. C'est la valeur que α_2 ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

2. Puisque le système amorti oscille, son mouvement est pseudo-périodique: l'équation horaire est: $y(t) = Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \phi)$.
Pour que l'amplitude diminue à 1/7 de sa valeur il faut un temps τ tel que $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}(t+\tau)} = \frac{1}{7}Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}$
$\Longrightarrow \lambda\tau = \ln 7 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 7}{\lambda}$. A.N: $\lambda = 0,75s^{-1} \Longrightarrow \tau \approx \mathbf{2,6}s$.

3. Le décrément logarithmique est $\delta = \lambda T = \lambda\frac{2\pi}{\omega} = \lambda\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$. **A.N:** $\delta \approx \mathbf{1,53}$.

4. Puisque l'amplitude diminue à 1/8 de sa valeur après 2 oscillations, on a: $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}'(t+2T')} = \frac{1}{8}Ae^{-\boldsymbol{\lambda}' t}$
$\Longrightarrow \lambda'.2\text{T}' = \ln 8 \Longrightarrow \lambda'\frac{4\pi}{\omega'} = \ln 8 \Longrightarrow \frac{4\pi\lambda'}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda'^2}} = \ln 8 \Longrightarrow \lambda' = \frac{\omega_0 \ln 8}{\sqrt{(4\pi)^2+(\ln 8)^2}}$.
A.N: $\lambda' \approx 0,52s^{-1}$. Puisque $\lambda' = \frac{\alpha_1+\alpha_2'}{2m}$, on trouve $\alpha_2' \approx \mathbf{0,08}$N.s/m.

3.3 L'équation du mouvement trouvée à l'exercice 1.3 est:

$$\boxed{\ddot{y}+\frac{2\alpha(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}\dot{y}+\frac{2k(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}y=0.}$$

1. **Sachant que** $M = 2$kg, $R = 50$cm, $r = 25$cm, $k = 10$N/m, **trouver la valeur maximale que le coefficient** α **ne doit pas atteindre pour que le système oscille.**
2. **Avec un amortisseur de coefficient** $\alpha = 5$N.m^{-1}.s**, le système oscille mais son amplitude diminue au cours du temps. Trouver le temps** τ **nécessaire pour que l'amplitude diminue à** $1/2$ **de sa valeur.**
3. **Calculer le décrément logarithmique** δ.
4. **L'amortisseur précédent est maintenant remplacé par un autre de coefficient** α'. **On remarque alors que l'amplitude diminue à** $1/3$ **de sa valeur après** 22 **oscillations complètes. Déduire la valeur du coefficient** α'.

Solution

L'équation est de la forme $\ddot{y}+2\lambda\dot{y}+\omega_0^2 y=0$, avec: $\lambda=\frac{\alpha(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}$ et $\omega_0^2=\frac{2k(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}$.

1. Pour qu'un système amorti oscille, il faut qu'il soit en régime pseudo-périodique, donc il faut que: $\lambda^2-\omega_0^2<0 \Longrightarrow \lambda<\omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}<\sqrt{\frac{2k(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}} \Longrightarrow \alpha<\frac{\sqrt{2kM(2r^2+R^2)}}{r+R}$.

A.N: $\alpha < \mathbf{5,16}$**N.s/m**. C'est la valeur que α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

2. Puisque le système amorti oscille son mouvement est pseudo-périodique: l'équation horaire est: $y(t)=Ae^{-\boldsymbol{\lambda}t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t+\phi)$.

Pour que l'amplitude diminue à $1/2$ de sa valeur il faut un temps τ tel que $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}(t+\tau)}=\frac{1}{2}Ae^{-\boldsymbol{\lambda}t}$ $\Longrightarrow \lambda\tau=\ln 2 \Longrightarrow \tau=\frac{\ln 2}{\lambda}$. **A.N:** $\lambda = 3,75\text{s}^{-1} \Longrightarrow \tau \approx \mathbf{0,18}s$.

3. Le décrément logarithmique est $\delta=\lambda T=\lambda\frac{2\pi}{\omega}=\lambda\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$. **A.N:** $\delta \approx \mathbf{24,33}$.

4. Puisque l'amplitude diminue à $1/3$ de sa valeur après 22 oscillations, on a: $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}'(t+22T')}=\frac{1}{3}Ae^{-\boldsymbol{\lambda}'t}$ $\Longrightarrow \lambda'.22T'=\ln 3 \Longrightarrow \lambda'\frac{44\pi}{\omega'}=\ln 3 \Longrightarrow \frac{44\pi\lambda'}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda'^2}}=\ln 3 \Longrightarrow \lambda'=\frac{\omega_0\ln 3}{\sqrt{(44\pi)^2+(\ln 3)^2}}$.

A.N: $\lambda'\approx 0{,}03\text{s}^{-1}$. Puisque $\lambda'=\frac{\alpha'(r+R)^2}{M(2r^2+R^2)}$, on trouve $\alpha'\approx\mathbf{0,04}$N.s/m.

3.4 L'équation du mouvement trouvée à l'exercice 1.4 est:

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{2\alpha(R-L)^2}{3MR^2+2m(R-L)^2}\dot{\theta}+\frac{2mgL(1-\rho_0/\rho)}{3MR^2+2m(R-L)^2}\theta=0.}$$

Les grandeurs du système sont:
$M = 20$kg, $m = 1,125$kg, $L = 50$cm, $R = 25$cm, $\alpha = 0,93$N.m^{-1}.s, $\rho = 1751$kg/m^3, $g = 10$m/s^2.
En observant les oscillations du système on a remarqué que l'amplitude des écartements a diminué à un $1/6$ **de sa valeur après** 23 **oscillations.**

1. **Utiliser cette observation et le tableau ci-dessous contenant les densités de quelques liquides pour découvrir le liquide dans lequel est plongé la boule.**
2. **Calculer le facteur de qualité de cet oscillateur.**

Liquide	**Densité** ρ_0 (kg/m^3)
Lait	1035
Eau de mer	1028
Eau	1000
Huile d'olive	910
Benzène	879
Alcool	789

Solution

L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, avec: $\lambda = \frac{\alpha(R-L)^2}{3MR^2+2m(R-L)^2}$ et $\omega_0^2 = \frac{2mgL(1-\rho_0/\rho)}{3MR^2+2m(R-L)^2}$.

1. Pour découvrir la nature du liquide il faut trouver sa densité ρ_0 qui se cache dans ω_0.

Puisque le système amorti oscille son mouvement est pseudo-périodique: l'équation horaire est: $\theta(t) = Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t+\phi)$.

Puisque l'amplitude diminue à 1/6 de sa valeur après 23 oscillations, on a: $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}(t+23T)} = \frac{1}{6}Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}$

$\Longrightarrow \lambda.23T = \ln 6 \Longrightarrow \lambda\frac{46\pi}{\omega} = \ln 6 \Longrightarrow \frac{46\pi\lambda}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \ln 6 \Longrightarrow \omega_0 = \lambda\frac{\sqrt{(46\pi)^2+(\ln 6)^2}}{\ln 6}$.

A.N: $\lambda \approx 0{,}015\text{s}^{-1} \Longrightarrow \omega_0 \approx 1{,}2\text{rad/s} \Longrightarrow \rho_0 \approx \mathbf{879}\text{kg/m}^3$.

On a découvert la nature du liquide sans l'avoir examiné. En effet, d'après le tableau donné, cette densité correspond au **benzène**!

2. Le facteur de qualité de cet oscillateur est: $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} \approx \mathbf{40}$.

3.5 L'équation différentielle de la tension u_L trouvée à l'exercice 1.5 est:

$$\boxed{\ddot{u}_L + \frac{R}{L}\dot{u}_L + \frac{1}{LC}u_L = 0.}$$

1. **Sachant que $L = 2\text{H}$, $C = 50\text{nF}$, trouver la valeur maximale que la résistance R ne doit pas atteindre pour que le circuit oscille.**
2. **Avec une résistance $R = 500\Omega$, le circuit oscille mais l'amplitude de u_L diminue au cours du temps. Trouver le temps τ nécessaire pour que l'amplitude diminue à $1/5$ de sa valeur.**
3. **Calculer le facteur de qualité de cet oscillateur.**
4. **La résistance précédente est maintenant remplacée par une autre plus faible R' On remarque alors que l'amplitude diminue à $1/9$ de sa valeur après 12 oscillations complètes. Déduire la valeur de la résistance R'.**

Solution

L'équation est de la forme $\ddot{u}_L + 2\lambda\dot{u}_L + \omega_0^2 u_L = 0$, avec: $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

1. Pour qu'un système amorti oscille, il faut qu'il soit en régime pseudo-périodique, donc il faut que: $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{R}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}} \Longrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

A.N: $R < \mathbf{12649}\Omega$. C'est la valeur que R ne doit pas atteindre pour que le circuit oscille.

2. Puisque le circuit amorti oscille son régime est pseudo-périodique: l'équation horaire est: $u_L(t) = Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t+\phi)$.

Pour que l'amplitude diminue à 1/5 de sa valeur il faut un temps τ tel que $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ae^{-\boldsymbol{\lambda} t}$ $\Longrightarrow \lambda\tau = \ln 5 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 5}{\lambda}$. **A.N:** $\lambda \approx 125\text{s}^{-1} \Longrightarrow \tau \approx \mathbf{0{,}013}\text{s}$.

3. Le facteur de qualité de cet oscillateur est $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx \mathbf{12{,}6}$.

4. Puisque l'amplitude diminue à 1/9 de sa valeur après 12 oscillations, on a: $Ae^{-\boldsymbol{\lambda}'(t+12T')} = \frac{1}{9}Ae^{-\boldsymbol{\lambda}' t}$

$\Longrightarrow \lambda'.12T' = \ln 9 \Longrightarrow \lambda'\frac{24\pi}{\omega'} = \ln 9 \Longrightarrow \frac{24\pi\lambda'}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda'^2}} = \ln 9 \Longrightarrow \lambda' = \frac{\omega_0 \ln 9}{\sqrt{(24\pi)^2+(\ln 9)^2}}$.

A.N: $\lambda' \approx 92{,}2s^{-1}$. Puisque $\lambda' = \frac{R'}{2L}$, on trouve $R' \approx \mathbf{368{,}8}\Omega$